

## 8. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Функция распределения (смысл):

$$f(v) = \frac{dN}{N \cdot dv}.$$

Для очень малого интервала  $\Delta v$ :

$$f(v) = \frac{\Delta N}{N \cdot \Delta v}.$$

Функция распределения молекул по модулям скоростей  $V$  (распределение Максвелла):

$$f(V) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0 V^2}{2kT}} \cdot V^2.$$

Функция распределения молекул по проекциям скоростей  $V_x$  (распределение Гаусса):

$$f(V_x) = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m_0 V_x^2}{2kT}}.$$

Функция распределения молекул в поле постоянной силы  $F$  (распределение Больцмана):

$$n(x) = n_0 e^{-\frac{F \cdot x}{kT}}.$$

Среднее значение микропараметра  $x$  при известной функции распределения  $f(x)$ :  $\langle x \rangle = \int x \cdot f(x) dx$ .

Справочный интеграл:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2a};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{\sqrt{\pi} \cdot a^{-1.5}}{4};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cdot x^3 \cdot dx = \frac{1}{2a^2};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cdot x^4 \cdot dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} a^{-5/2}.$$

8.1. Найдите для газообразного азота температуру, при которой скоростям молекул  $v_1 = 300$  м/с и  $v_2 = 600$  м/с соответствуют одинаковые значения функции распределения Максвелла  $f(V)$ . Ответ:

$$T = \frac{m(V_2^2 - V_1^2)}{4k \ln(V_2/V_1)} = 330 \text{ К}.$$

8.2. Найдите для газообразного азота скорость молекул, при которой значение функции распределения Максвелла  $f(V)$  для температуры  $T_0$  будет таким же, как и для температуры в  $\eta$  раз большей.

Ответ:  $V = \sqrt{\frac{3kT_0}{m} \frac{\eta \cdot \ln \eta}{\eta - 1}}.$

8.3. Определите, при какой температуре газа, состоящего из смеси азота и кислорода, наиболее вероятные скорости молекул азота и кислорода будут отличаться друг от друга на  $\Delta v = 30$  м/с? Ответ: 363 К.

8.4. Смесь водорода и гелия находится при температуре  $T = 300$  К. Определите, при каком значении скорости молекул значения Максвелловской функции распределения по скоростям  $f(V)$  будут одинаковыми для обоих газов? Ответ: 1,61 км/с.

8.5. При нагревании некоторого газа наиболее вероятная скорость его молекул увеличилась от 400 до 800 м/с. Найти числовое значение скорости молекул, количество которых не изменилось при нагревании. Ответ: 665 м/с.

8.6. Пользуясь Максвелловской функцией распределения по скоростям  $f(V)$  покажите, что между средней квадратичной  $V_{\text{кв}}$ , средней арифметической  $V_{\text{ар}}$  и наиболее вероятной  $V_{\text{в}}$  скоростями справедливо соотношение  $V_{\text{кв}} > V_{\text{ар}} > V_{\text{в}}$ .

8.7. Распределение молекул по скоростям в пучке, выходящем из отверстия в сосуде, описывается функцией  $f(V) = AV^3 e^{-\frac{mV^2}{2kT}}$ , где  $T$  – температура газа внутри сосуда,  $m$  – средняя масса молекул,  $A$  – коэффициент. Найдите наиболее вероятное значение скорости молекул в пучке. Сравните полученную величину с наиболее вероятной скоростью молекул в самом сосуде. Ответ:  $V_{\text{в}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$

8.8. Водород находится при нормальных условиях и занимает объем 1 см<sup>3</sup>. Определить число молекул в этом объеме, обладающих скоростями меньше 1 м/с. Ответ:  $4,4 \cdot 10^9$ .

8.9. Водород находится при температуре  $T = 273$  К. Определите отношение числа молекул водорода, обладающих скоростями в интервале от 2 до 2,01 км/с, к числу молекул, обладающих скоростями от 1 до 1,01 км/с. Ответ: 1,07.

8.10. В сосуде объемом 2 л находится гелий при нормальных условиях в равновесном состоянии. На сколько изменится число молекул, имеющих скорости от 500 до 510 м/с, если температуру газа увеличить в 2 раза? Найти наиболее вероятную скорость молекул до и после нагревания и объяснить полученный результат. Ответ:  $1,2 \cdot 10^{20}$ , 1070 м/с, 1500 м/с.

8.11. Для кислорода и гелия, находящихся при  $T=300\text{K}$  в равновесном состоянии, найти относительное число молекул, имеющих скорости от 390 до 400 м/с. Объяснить разницу полученных значений, вычислив предварительно наиболее вероятные скорости молекул обоих газов. Ответ:  $2,1 \cdot 10^{-2}$ ;  $2,2 \cdot 10^{-3}$ .

8.12. Найдите, при какой температуре число молекул азота, скорости которых лежат в интервале 299 – 301 м/с, равно числу молекул со скоростями в интервале 599 – 601 м/с? Ответ:  $56^0\text{C}$ .

8.13. Определить относительное число  $\omega$  молекул идеального газа, скорости которых заключены в пределах от нуля до одной сотой наиболее вероятной скорости  $V_B$ . Ответ:  $7,52 \cdot 10^{-7}$ .

8.14. Определите, при какой температуре идеального газа число молекул в заданном интервале  $v, v+dv$  будет максимально? Масса каждой молекулы равна  $m$ . Ответ:  $T = \frac{mV^2}{3k}$

8.15. Найти среднее значение проекции скорости молекул углекислого газа  $\langle V_x \rangle$ , находящегося в равновесии, движущихся в положительном направлении некоторой оси X при  $t=20^0\text{C}$ . Ответ: 94 м/с.

8.16. Идеальный газ находится в равновесном состоянии. Вывести формулу для нахождения среднего значения проекции импульса молекул, движущихся в положительном направлении некоторой оси X, проведенной в объеме этого газа. Ответ:  $\langle p_x \rangle = \sqrt{mkT/2\pi}$ .

8.17. При какой температуре среднее значение положительной проекции скорости молекул  $\langle V_x \rangle$  углекислого газа будет иметь такое же значение, как и для кислорода при температуре 200 K? Ответ: 413K.

8.18. Газообразный азот находится в равновесном состоянии при нормальных условиях. Найти относительное число молекул, имеющих положительные проекции скорости  $V_x$  в интервалах от 60 до 65 м/с и от 300 до 305 м/с. Объяснить полученный результат. Ответ: 0,68%, 0,4%.

8.19. Определите высоту горы, если давление на ее вершине равно половине давления на уровне моря. Температуру считать везде одинаковой и равной  $t = 7^0\text{C}$ . Ответ: 5,6 км.

8.20. Договоримся, что верхняя граница атмосферы Земли находится на высоте, где давление в 1 млн. раз меньше, чем у поверхности земли. Какова в этом случае высота атмосферы? Какой была бы высота атмосферы, если бы она состояла из водорода? Считать, что

температура атмосферы по всей высоте равна 250 К, а ускорение свободного падения практически не меняется. Ответ: 100, 1460 км.

8.21. Атмосфера Венеры состоит из углекислого газа и имеет температуру 500<sup>0</sup>С. Во сколько раз высота венерианской атмосферы превосходит земную? Атмосферу Земли считать изотермической с T=250К. Ускорение свободного падения Венеры равно 8,9 м/с<sup>2</sup>. Критерий для определения высоты атмосферы установите самостоятельно. Ответ: 2,24.

8.22. Закрытую с обоих концов горизонтальную трубку длиной 1м перемещают с постоянным ускорением а, направленным вдоль ее оси. Внутри трубки находится аргон при температуре 330 К. При каком значении концентрации аргона вблизи торцов трубки будут отличаться друг от друга на 1 %? Ответ: 70g.

8.23. При наблюдении в микроскоп взвешенных частиц гуммигута обнаружено, что среднее число их в слоях, расстояние между которыми h=40 мкм, отличается друг от друга в η=2 раза. Температура среды T=290К. Диаметр частиц d=0,4 мкм и их плотность на Δρ=0,2 г/см<sup>3</sup> больше плотности окружающей жидкости. Найти по этим данным число Авогадро. Ответ:  $N_A = (6RT/\pi d^3 \Delta \rho g h) \ln \eta = 6,4 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ .

8.24. Найти силу, действующую на частицу со стороны однородного поля, если концентрации этих частиц на двух уровнях, отстоящих друг от друга на расстоянии Δh=3 см(вдоль поля), отличаются в η=2раза. Температура системы T=280К.

Ответ:  $F = (kT/\Delta h) \ln \eta = 0,9 \cdot 10^{-19} \text{ Н}$ .

## 9. МКТ. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа:

$$E = \frac{i}{2} kT, \text{ где } i - \text{число степеней свободы, } k - \text{постоянная Больцмана,}$$

T- термодинамическая температура.

Скорости молекул:

$$\text{средняя квадратичная } \langle V_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}};$$

$$\text{средняя арифметическая } V_{\text{ар}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}};$$

$$\text{наиболее вероятная } V_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \text{ где } R - \text{универсальная}$$

газовая постоянная,  $\mu$ - молярная масса газа,  $m_0$ - масса молекулы газа.

Основное уравнение МКТ для идеального газа:

$$P = \frac{1}{3} m_0 n \langle V_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{2}{3} n E, \text{ где } n - \text{концентрация молекул, } E - \text{средняя}$$

кинетическая энергия поступательно движения молекул.

Уравнение состояния идеального газа(уравнение Менделеева-Клапейрона):

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \text{ где } P - \text{давление газа, } V - \text{его объем, } T - \text{термодинамическая}$$

температура.

Уравнение состояния для смеси газов:

$$PV = \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} + \dots \right) RT.$$

Связь макропараметров в адиабатическом процессе:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma, T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma P_2^{1-\gamma}, T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1},$$

где  $\gamma = \frac{i+2}{i}$  -показатель адиабаты;  $i$ -число степеней свободы.

9.1. Идеальный газ изохорически охладил, а затем изобарически расширил до первоначальной температуры. Во сколько раз изменяется энергии поступательного движения молекул газа в изохорическом

процессе, если в ходе его давление газа уменьшилось в 3 раза? Во сколько раз изменяется средняя скорость движения молекул в изобарическом процессе? Ответ: 3; 1,73.

9.2. Идеальный двухатомный газ объемом 5 л и давлением  $10^6$  Па изохорически нагрели, в результате чего средняя кинетическая энергия его молекул увеличилась от 0,0796 эВ до 0,0923 эВ. На сколько при этом измениться давление газа? В дальнейшем газ изотермически расширили до начального давления. Определите объем газа в конце процесса. Ответ: увеличится на 0,16 МПа; 5,8л.

9.3. Средняя арифметическая скорость молекул углекислого газа в исходном состоянии 1 равна  $v=500$  м/с; плотностью газа в этом состоянии  $\rho=5$  г/л. Газ совершил процесс, представленный на рис.1. Определите массу газа и его давление в состояниях 1, 2 и 3. Проанализируйте качественно, как изменяется давление в процессе 1-2. Ответ: 30 г; 4,9 и 9,8 атм.

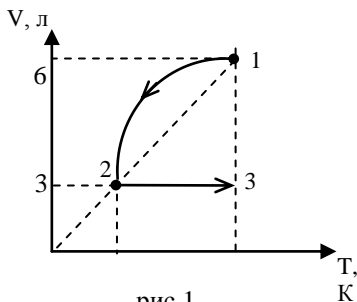


рис.1.

9.4. Два моля кислорода изотермически сжали, а затем изобарически расширили до первоначального объема. Известно, что  $P_1=550$  кПа,  $V_1=9 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>, а средняя квадратичная скорость движения молекул в конечном состоянии равна 720 м/с. На сколько измениться конечная средняя кинетическая энергия его молекул относительно начальной. Представить графики описанных процессов в координатах V-T. Ответ: 0,0079 эВ.

9.5. 3 моля азота плотностью  $\rho=1,25$  кг/м<sup>3</sup> изохорно нагрели так, что его давление изменилась с  $1,1 \cdot 10^5$  Па до  $1,6 \cdot 10^5$  Па, а затем изобарно сжали до первоначальной температуры. Определите температуры в каждом из трех описанных состояний и конечный объем газа. Изобразите графики этих процессов в координатах P-T. Ответ: 297К; 432К; 46л.

9.6. С углекислым газом с исходной плотностью  $1,15$  кг/м<sup>3</sup> совершен процесс, приведенный на рис.2. Определите число молей газа, участвующих в процессе. На сколько изменится температура в конце второго процесса по сравнению с началом первого процесса? Как изменялась средняя скорость молекул в процессе перехода газа из состояния 1

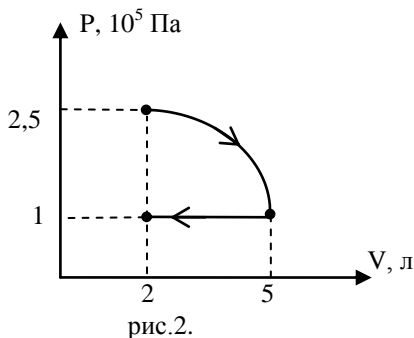


рис.2.

в состояние 2? Ответ: 0,052 моль; 690 К.

9.7. Один моль кислорода изотермически расширили от  $V_1=5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$  до  $V_2=8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ . Затем его изобарически сжали до первоначального объема. Известно, что в начальном состоянии  $P_1=800 \text{ кПа}$ . Найдите изменение средней кинетической энергии поступательного движения молекул газа. Представить графики описанных процессов в координатах  $V$ - $T$ . Ответ: 0,023 эВ.

9.8. 5 молей кислорода совершают процесс, изображенный на рис. 3, состоящий из изохоры, изобары и изотермы. Известно, что в первом состоянии давление  $P_1=12 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , объем газа в изобарическом процессе изменяется в 3 раза, объем кислорода в третьем состоянии  $V_3=24 \text{ л}$ , средняя кинетическая энергия молекул в конечном состоянии  $E_4=2 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$ . Найти по этим данным среднюю квадратичную скорость движения молекул в первом состоянии. Ответ: 425 м/с.

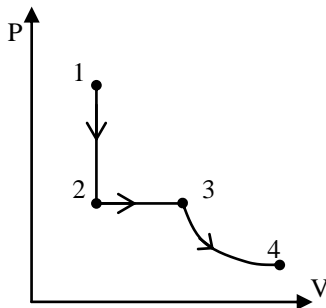


рис.3.

9.9. Найти давление и среднюю кинетическую энергию теплового движения молекул 0,8 молей гелия в начале процесса, изображенного на рис. 4, где 2-3 – изотерма. Известно, что средняя скорость молекул в конечном состоянии 2,5 км/с, а давление в изохорном процессе изменяется в 2,5 раза. Ответ:  $1,67 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ; 0,039 эВ.

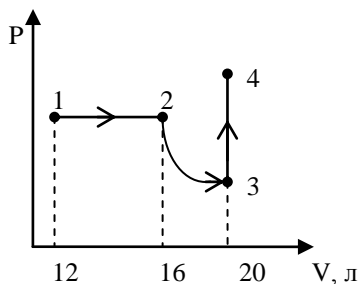


рис.4.

9.10. Один моль некоторого газа совершает процесс представленный на рис.5. Известно, что наиболее вероятная скорость молекул в исходном состоянии равна 301,5 м/с, а давление в первом процессе возрастает в 4 раза. В конечном состоянии давление газа 8 атм. Какой это газ? Какова его начальная плотность? Как изменялся объем газа в процессе перехода газа из состояния 1 в состояние 2? Ответ:  $\text{CO}_2$ ; 4,4 г/л.

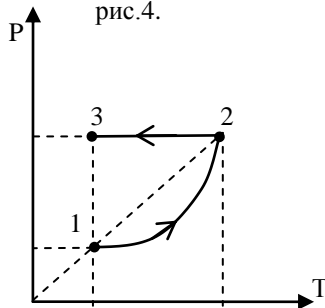


рис.5.

9.11. С одним молем азота,

который имел начальное давление  $P_1=120$  кПа, провели процесс, состоящий из изохоры и изобары. Известно, что в конце процесса температура стала равной 320 К, а в изохорическом процессе средняя арифметическая скорость молекул газа увеличилась с 430 м/с до 470 м/с. Найдите исходный и конечный объемы газа. Представить графики описанных процессов в координатах V-T. Ответ: 17 и 19 л.

9.12. Два моля двухатомного газа имеют исходную концентрацию молекул  $n_1=4 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ . Газ сначала изохорно нагревают так, что средняя кинетическая энергия молекул увеличивается с 0,052 эВ до 0,096 эВ. Затем изотермически сжимают так, что объем газа уменьшается в 2 раза. Найти объем газа в конечном состоянии. Представить графики описанных процессов в координатах P-T. Ответ: 15 л.

9.13. В сосуде объемом 30 л находится некоторый газ, который имеет температуру, соответствующую средней скорости движения молекул 493 м/с. После того, как часть газа была выпущена наружу, давление в сосуде понизилось на 0,78 атм. (без изменения температуры). Найти массу выпущенного газа. Какой это газ, если плотность этого газа при нормальных условиях  $\rho_0=1,235 \text{ кг/м}^3$ . Ответ: 29 г;  $\text{N}_2$ .

9.14. В сосуде находится смесь  $m_1=7$  г азота и  $m_2=11$  г углекислого газа при температуре  $T=290$  К и давлении  $P=1$  атм. Найти плотность этой смеси, считая газы идеальными. Во сколько раз отличаются средние скорости движения молекул газов смеси и средние кинетические энергии их движения? Ответ:  $1,5 \text{ кг/м}^3$ ; 1,25; 1,2.

9.15. В сосуде объемом 20 л находится смесь водорода и гелия под давлением 2 атм. Общая масса смеси 5 г. Известно, что средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул смеси газов равна 0,038 эВ. Во сколько раз отличаются массы водорода и гелия в смеси? Ответ: 2,2 раза.

9.16. Азот с начальными параметрами  $P_1=500$  кПа,  $T_1=250$  К и  $V_1=0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$  подвергли изотермическому расширению. Затем он был изобарно сжат до первоначального объема, в результате чего средняя скорость движения молекул уменьшилась в  $n=1,3$  раз. Найти массу азота и  $V_2$  в промежуточном состоянии. Ответ: 3,4 г; 0,84 л.

9.17. Воздух находится в закрытом пробкой сосуде при давлении  $10^5$  Па, равном внешнему атмосферному. Воздух нагрели, в результате чего средняя кинетическая энергия его молекул увеличилась от 0,0647 эВ до 0,0863 эВ. На сколько при этом изменилось давление газа? До какой изменится температура воздуха в сосуде, если пробку открыть, в результате чего он очень быстро расширится? Представить графики описанных процессов в координатах P-V. Ответ:  $0,33 \cdot 10^5$  Па; 369 К.

9.18. Некоторое количество гелия сначала адиабатически сжали. Затем изобарически расширили до первоначального объема. Во сколько раз изменилась средняя скорость движения молекул гелия при



расширении, если известно, что при сжатии давление увеличилось в 3 раза? Ответ: 1,39.

9.19. Двухатомный газ сначала изобарически сжали, а затем адиабатически расширили до первоначального объема. Известно, что при расширении давление уменьшилось в 4 раза. Во сколько раз изменилась наиболее вероятная скорость молекул газа при сжатии? Ответ: 1,64.

9.20. Кислород, находившийся при температуре 370 К, подвергли адиабатическому расширению, в результате которого давление уменьшилось в 4 раза. При последующем изотермическом сжатии установилось первоначальное давление. Найти среднюю квадратичную скорость движения молекул кислорода в изотермическом процессе. Во сколько раз изменился объем газа при переходе из начального состояния в конечное состояние. Ответ: 440 м/с; 1,49.

9.21. Сжатый азот, имевший первоначально температуру 400 К, сначала очень быстро (адиабатически) расширили до объема 7 л, а затем очень медленно (изотермически), сжали. В обоих процессах давление изменялось в 4 раза. Найти: 1) объемы газа в начальном и конечном состояниях; 2) изменение средней арифметической скорости молекул азота в адиабатическом процессе. Ответ: 1,75 л, 2,6 л; 100 м/с.

9.22. Некоторое количество азота сначала адиабатически сжали, затем изобарически расширили до первоначального объема. Известно, что при изобарическом расширении средняя скорость движения молекул возросла в 1,41 раза. Во сколько раз увеличилось давление при сжатии? Ответ: 2,64.

9.23. Двухатомный газ адиабатически расширяют так, что давление уменьшается в 5 раз. На сколько при этом изменится средняя кинетическая энергия его молекул? Во сколько раз изменится объем газа при последующим изотермическом сжатии до первоначального давления? Начальная температура газа 420 К. Ответ: 0,0334 эВ; 5.

9.24. Двухатомный газ, находившийся в закрытом сосуде при нормальных условиях, нагрели до  $T=400$  К. На сколько изменится средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа? Во сколько раз изменится давление в сосуде по отношению к первоначальному состоянию, если при открытии пробки газ адиабатически расширится и его температура понизится до 300 К? Представить графики описанных процессов в координатах  $P$ - $T$ . Ответ: 0,0164 эВ; 1,9.